第3章 直交表實驗

Experiments with Orthogonal Arrays

1. 實驗設計法（Methods of Experimental Design）
2. 實驗模式的建構（Building of Empirical Models）
3. 加法模式（Additive Models）
4. 含交互作用的加法模式（Additive Models with Interactions）
5. 直交表概觀（Overview of Orthogonal Arrays）

第3.1節 實驗設計法
Methods of Experimental Design

3.1-1 試誤法（Trial-and-Error）

3.1-2 一次一因子實驗法（One-Factor-at-a-Time）

3.1-3 全因子實驗法（Full-Factorial Experiments）

3.1-4 田口式直交表實驗法（Taguchi’s Orthogonal Arrays）

3.1-5 交互作用及可疊加性（Interactions and Additivity）

3.1-6 預測最佳設計下的品質特性（Prediction）

3.1-7 實驗模式（Empirical Models）

實驗設計法

- 以實驗的方式來決定設計參數有很多種可能方法：
  - 試誤法
  - 一次一因子實驗法
  - 全因子實驗法
  - 田口式直交表實驗法

3.1-1 試誤法 (Trial-and-Error)

- 無需任何資料分析或使用直交表。
- 不是有系統性的方法。
- 太過依賴個人的經驗。
- 大部份的時候沒有效率。
- 所累積的經驗是沒有系統的，很難傳承給其他人。

3.1-2 一次一因子實驗法 (One-Factor-at-a-Time)

表3.1-1 一次一因子實驗的例子

Exp.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1
3	1	2	1	1	1	1	1
4	1	1	2	1	1	1	1
5	1	1	1	2	1	1	1
6	1	1	1	1	2	1	1
7	1	1	1	1	1	2	1
8	1	1	1	1	1	1	2

Why is it a one-factor-at-a-time method?

一次一因子實驗法

表3.1-2 一次一因子實驗例子的數據及因子效應

Exp.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*y*
1	1	1	1	1	1	1	1	1.2
2	2	1	1	1	1	1	1	1.5
3	1	2	1	1	1	1	1	1.7
4	1	1	2	1	1	1	1	0.3
5	1	1	1	2	1	1	1	1.9
6	1	1	1	1	2	1	1	1.6
7	1	1	1	1	1	2	1	0.6
8	1	1	1	1	1	1	2	1.3
Effect	0.3	0.5	-0.9	0.7	0.4	-0.6	0.1	

- 最佳的製程參數組合： $A1$ $B1$ $C2$ $D1$ $E1$ $F2$ $G1$
- 因子效應是相對於特定的參照實驗條件下的計算值。
- 換句話說，因子效應是在某種「偏見」（bias）下評估出來的。
- 全因子直交表實驗的好處是可以完全消除這種「偏見」。

3.1-3 全因子實驗法 (Full-Factorial Experiments)

表3.1-3 四個因子的全因子實驗陣列

Exp.	*A*	*B*	*C*	*D*
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	1	2	1
4	1	1	2	2
5	1	2	1	1
6	1	2	1	2
7	1	2	2	1
8	1	2	2	2
9	2	1	1	1
10	2	1	1	2
11	2	1	2	1
12	2	1	2	2
13	2	2	1	1
14	2	2	1	2
15	2	2	2	1
16	2	2	2	2

- 全因子實驗法是考慮所有可能的因子變動組合。
- 全因子實驗陣列必然是一個直交表。
- 全因子直交表實驗可以將「偏見」完全排除。
- 缺點?

全因子實驗法

表3.1-4 全因子實驗例子之數據及因子效應

Exp.	A	B	C	D	y
1	1	1	1	1	0.43
2	1	1	1	2	0.60
3	1	1	2	1	0.01
4	1	1	2	2	0.18
5	1	2	1	1	0.76
6	1	2	1	2	0.88
7	1	2	2	1	0.21
8	1	2	2	2	0.42
9	2	1	1	1	1.02
10	2	1	1	2	1.13
11	2	1	2	1	0.59
12	2	1	2	2	0.68
13	2	2	1	1	1.29
14	2	2	1	2	1.34
15	2	2	2	1	0.86
16	2	2	2	2	0.96
Level 1	0.44	0.58	0.93	0.65	
Level 2	0.99	0.84	0.49	0.77	
Effect	0.55	0.26	-0.44	0.13	

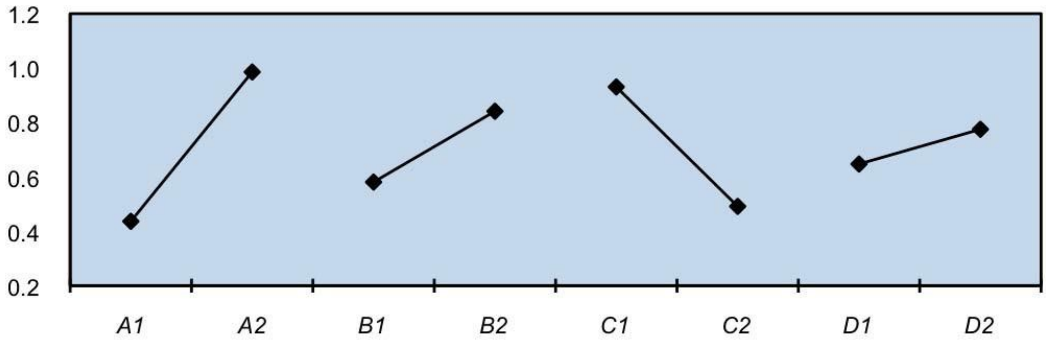
$$\bar{y}_{A1} = \frac{0.43+0.60+0.01+0.18+0.76+0.88+0.21+0.42}{8} = 0.44$$

$$\bar{y}_{A2} = \frac{1.02+1.13+0.59+0.68+1.29+1.34+0.86+0.96}{8} = 0.99$$

$$E_A^{1\to 2} = \bar{y}_{A2} - \bar{y}_{A1} = 0.99 - 0.44 = 0.55$$

How to calculate the effect of B?

全因子實驗法



最佳製程參數組合： A1 B1 C2 D1

全因子實驗法

- 全因子實驗中，因為已經考慮所有可能的排列組合，我們可以不需做任何因子反應分析，而直接從實驗組中挑出一組最佳設計。
- 一般田口式直交表實驗並非「全因子」直交表實驗，亦即，並非所有水準組合都會出現在直交表中，最佳設計組合常常不在直交表實驗組中。
- 因子的總數及每個因子的水準數可以是任意的，但是最常用的因子水準數是2水準或3水準。

3.1-4 田口式直交表實驗法 （Taguchi′s Orthogonal Arrays）

- 附錄A的直交表，有些是田口玄一博士所設計，有些是前人所設計，我們統稱為「田口式直交表」，或只稱為「直交表」。
- 田口式直交表的構想是以較少的實驗次數來獲得有用的統計資訊。
- 「偏見」通常還是不能完全排除。
- 對解決工程品質問題的目的而言，田口式直交表常常是兼顧實驗成本及精確度下很好的折衷方法。

田口式直交表實驗法

- 典型的田口式直交表是以$\mathrm{L}_a(b^c)$來命名，它代表共有a組實驗、最多可以容納b個水準的因子c個，亦即一個a橫列c直行的實驗陣列。
- 字母L是這種直交表的原始名稱：Latin squares。
- 有些直交表同時可以容納兩種水準的因子（譬如2水準及3水準的因子），此時以$\mathrm{L}_a(b^c \times d^e)$來表示，它代表共有?組實驗、最多可以容納?個水準的因子?個。

表3.1-5

Exp.	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

Which orthogonal array is this?

田口式直交表實驗法

表3.1-6 實驗數據

Exp.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*y*
1	1	1	1	1	1	1	1	1.20
2	1	1	1	2	2	2	2	1.87
3	1	2	2	1	1	2	2	2.09
4	1	2	2	2	2	1	1	2.24
5	2	1	2	1	2	1	2	1.51
6	2	1	2	2	1	2	1	1.82
7	2	2	1	1	2	2	1	1.45
8	2	2	1	2	1	1	2	2.18

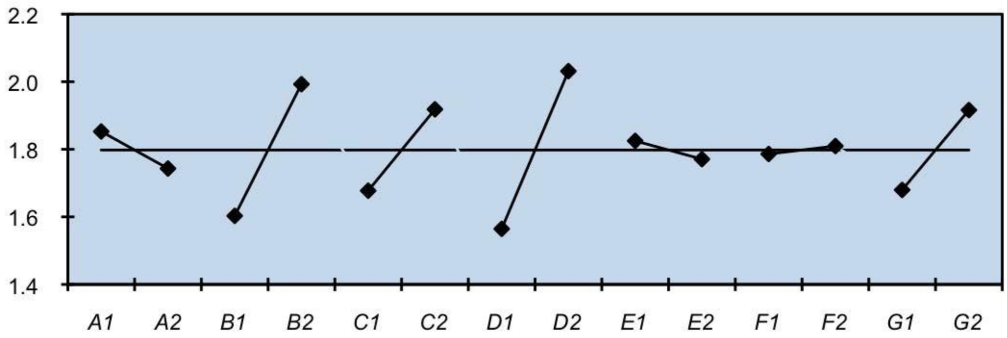
Ave = 1.80

表3.1-7 因子反應表

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Level 1	1.85	1.60	1.68	1.56	1.82	1.79	1.68
Level 2	1.74	1.99	1.92	2.03	1.77	1.81	1.92
Effect	-0.11	0.39	0.24	0.47	-0.05	0.02	0.24

Bias cannot be entirely eliminated. Why?

田口式直交表實驗法



最佳製程參數組合是：

A2 B1 C1 D1 E2 F1 G1 （3.1-1式）

◆ 以田口式直交表進行實驗，最佳因子組合通常不在實驗組中。

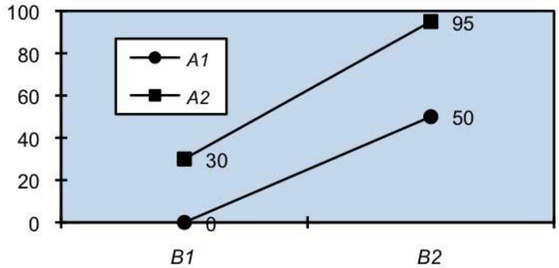
Back to p. 18

3.1-5 交互作用及可疊加性 (Interactions and Additivity)

表3.1-8 舉重實驗數據 (有交互作用)

Exp.	*A*	*B*	*y*
1	1	1	0
2	1	2	50
3	2	1	30
4	2	2	95
Level 1	25.0	15.0	Ave
Level 2	62.5	72.5	43.75

	B1	*B2*
A1	0	50
A2	30	95



- 若某一因子的效應依另一因子的設定水準而有所不同，則此兩因子之間存在著交互作用。
- 交互作用圖中，若兩直線平行則不存在交互作用，反之，若兩直線不平行則存在著交互作用；不平行的程度越大，代表交互作用越大。

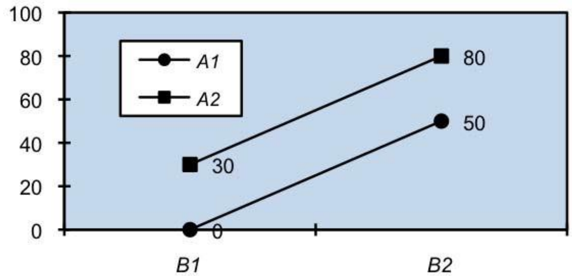
無交互作用的例子

若前述舉重例子的因子間無交互作用，則實驗數據應如何呈現?

表3.1-9 舉重實驗數據（無交互作用）

Exp.	*A*	*B*	*y*
1	1	1	0
2	1	2	50
3	2	1	30
4	2	2	80
Level 1	25	15	Ave
Level 2	55	65	40

	B1	*B2*
A1	0	50
A2	30	80



3.1-6 預測最佳設計下的品質特性（Prediction）

- 以總平均（1.80 mm）作為基準點。
- 當A因子設定在水準2時（翹曲量1.74 mm），其效應是翹曲量由平均1.80 mm降低了0.06 mm。
- 當B因子設定在水準1時（翹曲量1.60 mm），其效應是翹曲量由平均1.80 mm降低了0.20 mm。
- 依此，在最佳製程參數組合（A2 B1 C1 D1 E2 F1 G1）下，翹曲量為（假設完全沒有交互作用）：

$$
\begin{aligned}
y &= \bar{y} + (\bar{y}_{A2} - \bar{y}) + (\bar{y}_{B1} - \bar{y}) + (\bar{y}_{C1} - \bar{y}) + (\bar{y}_{D1} - \bar{y}) + (\bar{y}_{E2} - \bar{y}) + (\bar{y}_{F1} - \bar{y}) + (\bar{y}_{G1} - \bar{y}) \\
&= 1.80 + (1.74 - 1.80) + (1.60 - 1.80) + (1.68 - 1.80) \\
&\quad + (1.56 - 1.80) + (1.77 - 1.80) + (1.79 - 1.80) + (1.68 - 1.80) \\
&= 1.03 \text{ mm}
\end{aligned}
$$

預測最佳設計下的品質特性

- 將所有因子效應全部都疊加起來通常是太過樂觀的。
- 有些因子效應很小，在統計上不具任何意義。
- 合理的預測值應排除**這些不具意義的因子效應**。**是哪些?** Response graph
- 合理的預測值是？

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} + (\bar{y}_{B1} - \bar{y}) + (\bar{y}_{C1} - \bar{y}) + (\bar{y}_{D1} - \bar{y}) + (\bar{y}_{G1} - \bar{y}) \\ &= 1.80 + (1.60 - 1.80) + (1.68 - 1.80) + (1.56 - 1.80) + (1.68 - 1.80) \\ &= 1.13 \text{ mm} \end{aligned}$$

預測最佳設計下的品質特性

- 在 $Ai\ Bj\ Ck$ ...的因子組合（假設這些都是重要因子）時，預測值為：

$$y = \bar{y} + (\bar{y}_{Ai} - \bar{y}) + (\bar{y}_{Bj} - \bar{y}) + (\bar{y}_{Ck} - \bar{y}) + \cdots \qquad \text{（3.1-2式）}$$

- 要確認這個值的正確性之唯一方法：做確認實驗（confirmation experiments）。
- 若實驗值和預測值夠接近，則我們可以認定實驗模式是合理的：因子效應是可疊加的，因子之間的交互作用是可忽略的，甚至可以認為因子效應的估計是可靠的。

3.1-7 實驗模式（Empirical Models）

$$y = \bar{y} + (\bar{y}_{Ai} - \bar{y}) + (\bar{y}_{Bj} - \bar{y}) + (\bar{y}_{Ck} - \bar{y}) + \cdots \qquad （3.1\text{-}2式）$$

- 上式稱為一個實驗模式（empirical model，或稱為經驗模式、經驗公式），$\bar{y}, \bar{y}_{Ai}, \bar{y}_{Bj}, \bar{y}_{Ck}$ 等稱為此模式的參數，它們是因子反應表中的反應值。
- 實驗設計法的基本構想是利用實驗資料來建構一個實驗模式，再利用這個實驗模式來預測系統的行為。
- 實驗結論的可靠性有賴於此實驗模式的精確與否，所以必須以確認實驗來驗証此實驗模式的可靠性。
- 這個實驗模式稱之為加法模式（additive model），這是「田口方法」中使用的實驗模式。