第3.2節 實驗模式的建構
Building of Empirical Models

3.2-1 廣義線性模式（General Linear Model）

3.2-2 兩個控制因子（Two Control Factors）

3.2-3 三個控制因子（Three Control Factors）

3.2-4 三因子間的交互作用（Three-Factor Interactions）

3.2-5 對數轉換：分離變數（Logarithmic Transformation: Separation）

3.2-6 加法模式（Additive Model）

實驗設計法

- 實驗設計法的基本構想是利用實驗數據，來建構一個實驗模式（或稱為經驗模式，empirical model）。
- 這個實驗模式用來預測任何控制因子組合下的反應值。
- 確認實驗的目的是在證實這個實驗模式的合理性。

3.2-1 廣義線性模式 (Generalized Linear Model)

- 為了簡化說明，我們只考慮A, B兩個兩水準的因子。
- 假設每個因子的兩個水準值已經被轉換成-1及+1。譬如有一個因子x，原來的兩個水準分別是 x_L 及 x_U ，則下列轉換公式可以將 x 轉換成A，使A的兩個水準變成-1及+1：

$$A = \frac{x - (x_U + x_L)/2}{(x_U - x_L)/2} \qquad (3.2\text{-}1式)$$

- 傳統實驗設計法中所使用的實驗模式，稱為廣義線性模式，其形式如下：

$$y = c_0 + c_1 A + c_2 B + c_3 AB \qquad (3.2\text{-}2式)$$

其中c_0，c_1，c_2，c_3 是待定的參數。

廣義線性模式

- 因子效應E_A定義為「A因子每單位變動量，平均造成y的變動量」，亦即

$$E_A = \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial A}\right]_{B=+1} + \left[\frac{\partial y}{\partial A}\right]_{B=-1}}{2} = c_1 \qquad \text{（3.2-3式）}$$

- 以實驗數據來表示時可以寫成

$$E_A = \frac{\left[\frac{y_{A=+1} - y_{A=-1}}{2}\right]_{B=+1} + \left[\frac{y_{A=+1} - y_{A=-1}}{2}\right]_{B=-1}}{2} = c_1 \qquad \text{（3.2-4式）}$$

- 因子效應E_A剛好是廣義線性模式中，A項的係數。
- 這個結論可以推廣到其他因子效應。

廣義線性模式

- 交互作用$E_{A\times B}$（等於$E_{B\times A}$）則定義為「B因子每單位變動量，造成E_A的變動量」，亦即

$$E_{A\times B}=\frac{\left[\frac{\partial y}{\partial A}\right]_{B=+1}-\left[\frac{\partial y}{\partial A}\right]_{B=-1}}{2}=c_3 \qquad \text{（3.2-5式）}$$

- 以實驗數據來表示時可以寫成

$$E_{A\times B}=\frac{\left[\frac{y_{A=+1}-y_{A=-1}}{2}\right]_{B=+1}-\left[\frac{y_{A=+1}-y_{A=-1}}{2}\right]_{B=-1}}{2}=c_3 \qquad \text{（3.2-6式）}$$

- 交互作用$E_{A\times B}$剛好是廣義線性模式中，AB項的係數。

廣義線性模式

- 此外，3.2-2式的常數項c_0等於實驗數據的平均值$\bar{y}$，証明如下：

$$\bar{y} = \frac{y_{A=+1,B=+1} + y_{A=-1,B=+1} + y_{A=+1,B=-1} + y_{A=-1,B=-1}}{4}$$

$$= \frac{\left[\frac{y_{A=+1}+y_{A=-1}}{2}\right]_{B=+1} + \left[\frac{y_{A=+1}+y_{A=-1}}{2}\right]_{B=-1}}{2} = c_0$$

（3.2-7式）

廣義線性模式

- 我們的結論是，兩個因子時， 3.2-2式可以寫成

$$y = \bar{y} + E_A A + E_B B + E_{AxB} AB \qquad (3.2\text{-}8式)$$

- 以上結論可以推廣到更多控制因子的情況，譬如三個控制因子時，廣義線性模式為

- 傳統實驗設計法以廣義線性模式來作為實驗模式，因為它的形式很簡單，而且可以描述所有因子效應及所有交互作用。更重要的是，配合直交表的使用，這些待定參數的計算工作變得非常簡單。

3.2-2 兩個控制因子
(Two Control Factors)

表3.2-1 兩個控制因子例子的實驗數據

Exp.	x	z	y
1	1.2	30	2.7
2	1.2	40	2.6
3	1.8	30	3.5
4	1.8	40	3.2

$A =$

$B =$

表3.2-2 兩個控制因子例子（變數轉換後）的實驗數據

Exp.	A	B	$A \times B$	y
1	-1	-1	+1	2.7
2	-1	+1	-1	2.6
3	+1	-1	-1	3.5
4	+1	+1	+1	3.2

兩個控制因子

表3.2-3 兩個控制因子例子的因子效應分析表

Exp.	A	B	$A\times B$	y
1	-1	-1	+1	2.7
2	-1	+1	-1	2.6
3	+1	-1	-1	3.5
4	+1	+1	+1	3.2
Level -1	2.65	3.1	3.05	
Level +1	3.35	2.9	2.95	$\bar{y}$
Effect	0.35	-0.1	-0.05	3.00

實驗模式：

上述的實驗模式滿足所有A, B與y之間的關係，譬如在A = -1, B = +1時，

摘要（Summary）

- 直交表的使用大大地簡化了實驗模式的建構工作。
- 因子效應相當於此實驗模式中各因子一次項的係數，而交互作用相當於兩因子相乘項的係數，總平均值則相當於常數項。
- 本小節示範了 $L_4(2^3)$ 直交表的建構程序。
- 此實驗模式並非田口方法所使用的實驗模式，田口方法所使用的實驗模式稱為加法模式，將在3.2-5小節以後介紹。

3.2-3 三個控制因子 (Three Control Factors)

表3.2-4 三個控制因子例子的實驗

Exp.	*A*	*B*	*C*	*AxB*	*BxC*	*CxA*	*AxBxC*	*y*
1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	1.09
2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	1.71
3	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	0.91
4	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	0.29
5	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	2.91
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	4.29
7	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	2.29
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	2.51
Level -1	1.00	2.50	1.80	2.10	2.30	1.80	1.99	$\bar{y}$ 2.000
Level +1	3.00	1.50	2.20	1.90	1.70	2.20	2.01	
Effect	1.00	-0.50	0.20	-0.10	-0.30	0.20	0.01	

實驗模式：

3.2-4 三因子間的交互作用 (Three-Factor Interactions)

- $E_{A\times B\times C}$ 可以解釋成 $E_{A\times B}$ 隨C因子的水準變動所造成的差異。
- 從表3.2-4中， $E_{A\times B}$ 是-0.10，但是這是平均而言；當 C 因子在水準-1和水準+1時， $E_{A\times B}$ 分別是-0.11與-0.09，計算如下：

$$(E_{AxB})_{C=-1} =$$

$$(E_{AxB})_{C=+1} =$$

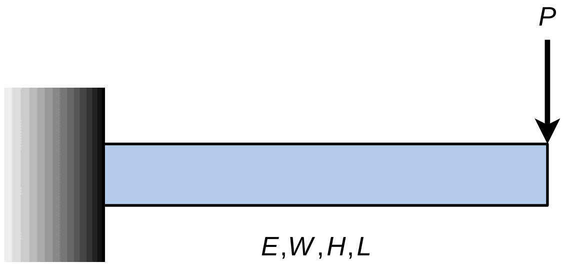
所以

$$E_{AxBxC} =$$

三因子間的交互作用

- $E_{A\times B\times C}$也可以解讀成$E_{B\times C}$隨A因子的水準變動所造成的差異，或是$E_{A\times C}$隨B因子的水準變動所造成的差異。
- 這些觀念可以推廣至更高次的交互作用（譬如4個因子間的交互作用）。
- 工程實務上，評估這些高次交互作用通常不切實際，也不需要。原因是：
  - 越高次交互作用通常越小。
  - 評估高次交互作用所需要的實驗次數會很多。

3.2-5 對數轉換：分離變數 Logarithmic Transformation: Separation of Variables



- 假想我們要設計一個懸臂樑，我們要選擇樑的尺寸及材料，使得在特定的端點集中力P下會有特定的端點變位y。

$$y = \frac{CPL^3}{EWH^3} \qquad (3.2\text{-}10式)$$

加法模式

- 如果我們將3.2-10式取對數轉換，可得

$$\log y = \log C + \log P + 3\log L - \log E - \log W - \log W \qquad (3.2\text{-}11式)$$

- 經對數轉換後，品質特性可以表示成幾個函數相加起來，而每個函數只含單一因子！
- 對數轉換將兩因子的相乘轉換成相加，亦即 $\log AB = \log A + \log B$ ；對數轉換也會將兩因子的指數關係轉換成相乘關係，亦即 $\log A^B = B \bullet \log A$ 。
- 一般而言，假設有*A*, *B*, *C*, ...等控制因子，則對數轉換後的工程量測值常常可以符合下列形式：

$$\eta(A,B,C,\ldots) = \eta_C + a(A) + b(B) + c(C) + \ldots \qquad (3.2\text{-}12式)$$

- 3.2-12式稱為加法模式。

含交互作用的加法模式

- 實務的工程問題常常比3.2-10式複雜的多，經對數轉換後也不像3.2-11式這麼簡單，以至於如3.2-12式的實驗模式也並不完全適用。
- 這時候必須考慮在3.2-12式中加入交互作用（亦即加入含兩個或以上因子的函數），譬如加入A與B的交互作用：

- 一般來說，如果需要考慮交互作用的話，考慮二因子間的交互作用就足夠了， 因為經對數轉換過後，越高次的交互作用會越小。

3.2-6 加法模式（Additive Model）

- 3.2-12式稱為「變數分離模式」（variables separable model），或稱為加法模式（additive model），它是田口方法中使用的實驗模式。
- 3.2-12式中含有未知函數，我們不可能從有限的實驗資料中去知道這些未知函數的形式，所以通常無法直接使用。
- 我們必須進一步誘導可供計算的公式。
- 為了解說的目的，我們只考慮3個控制因子：

$$\eta(A,B,C) = \eta_C + a(A) + b(B) + c(C) \qquad \text{（3.2-14式）}$$

- 這個模式含有未知函數，由實驗數據來決定這些未知函數的真正形式通常是辦不到的，但是我們並不需要知道函數的真正形式。

加法模式

- 實驗的目的是要找到一個實驗模式，讓我們可以預測各種因子組合下的反應值，譬如，$\eta(Ai,Bj,Ck)$ 的值（其中i, j, k可以是任何水準數，Ai表示A 在水準 i下的值，其餘類推）為

$$\eta(Ai,Bj,Ck) = \eta_C + a(Ai) + b(Bj) + c(Ck) \qquad \text{（3.2-15式）}$$

- 換句話說，我們需要知道這些函數的真正形式嗎? 我們只需知道什麼?

加法模式計算公式的誘導

- 考慮任何一個基準設計$(A0,B0,C0)$，它所相對的η 值是$\eta(A0,B0,C0)$。
- 由於3.2-15式的特殊形式（變數分離），下式會成立：

$$\begin{aligned}\eta(Ai,Bj,Ck)-\eta(A0,B0,C0) &= [\,\eta(Ai,B0,C0)-\eta(A0,B0,C0)] \\ &+ [\,\eta(A0,Bj,C0)-\eta(A0,B0,C0)] \\ &+ [\,\eta(A0,B0,Ck)-\eta(A0,B0,C0)]\end{aligned} \qquad \text{（3.2-16式）}$$

如何證明Eq. 3.2-16

加法模式計算公式的誘導

- 因為基準設計(A0,B0,C0) 可以是任意的，我們可以取η的總平均值 $\bar{\eta}$ 所相對的設計作為基準設計，亦即

$$\bar{\eta} = \eta(A0, B0, C0)$$

則3.2-16式可以寫成

其中， $\eta(Ai, B0, C0)$, $\eta(A0, Bj, C0)$, $\eta(A0, B0, Ck)$ 分別是因子反應表中的反應值 $\bar{\eta}_{Ai}$,$\bar{\eta}_{Bj}$,$\bar{\eta}_{Ck}$,所以上式可以用因子反應值來表示

加法模式

$$\eta(A,B,C) = \eta_C + a(A) + b(B) + c(C) \qquad \text{（3.2-14式）}$$

$$\eta(Ai,Bj,Ck) = \bar{\eta} + \left(\bar{\eta}_{Ai} - \bar{\eta}\right) + \left(\bar{\eta}_{Bj} - \bar{\eta}\right) + \left(\bar{\eta}_{Ck} - \bar{\eta}\right) \qquad \text{（3.2-17式）}$$

- Eq. 3.2-14是加法模式的「理論形式」，Eq. 3.2-17才是我們利用因子反應表中的數據，用來預測的公式。
- 3.2-17式及因子反應表構成完整的實驗模式。

加法模式的不同形式

- 在 $Ai\ Bj\ Ck...$ 因子水準組合下，利用加法模式所計算的預測值是

- 上式中，$\bar{\eta}_{Ai}-\bar{\eta}$ 代表 A 因子由 $A0$ 變動到 Ai 時，η 所增加的量；若以「因子效應」來表示，可以寫成 E_A^i。所以3.2-18式又可寫成

- 有時為了計算上的方便，我們將3.2-18式寫成

加法模式的不同形式

$$\eta(Ai,Bj,Ck,\cdots)=\overline{\eta}+\left(\overline{\eta}_{Ai}-\overline{\eta}\right)+\left(\overline{\eta}_{Bj}-\overline{\eta}\right)+\left(\overline{\eta}_{Ck}-\overline{\eta}\right)+\cdots \qquad \text{(3.2-18式)}$$

$$\eta(Ai,Bj,Ck,\cdots)=\overline{\eta}+E_A^i+E_B^j+E_C^k+\cdots \qquad \text{(3.2-19式)}$$

$$\eta(Ai,Bj,Ck,\cdots)=\overline{\eta}_{Ai}+\overline{\eta}_{Bj}+\overline{\eta}_{Ck}+\cdots-(n-1)\overline{\eta} \qquad \text{(3.2-20式)}$$

- 以上3個公式都可用來計算預測值。
- 3.2-18式及3.2-20式可以直接利用因子反應表的數據。
- 3.2-19式比較能表達「因子效應疊加」的內涵。
- 但是在實務計算上，3.2-20式是比較方便的。