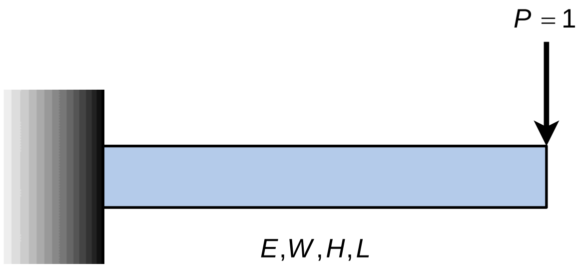
第3.3節 加法模式
Additive Models

3.3-1 因子效應的理論解（Analytical Factor Effects）
3.3-2 實驗與實驗模式的建立（Building Empirical Model）
3.3-3 實驗模式與理論公式的比較（Comparison）
3.3-4 討論：沒有經過對數轉換的情形（Discussion: Log Transformations）
3.3-5 討論：二水準實驗（Discussion: 2-Level Experiments）
3.3-6 對數轉換的負面效果（Drawbacks of Log Transformation）

懸臂樑實例



$$y=\frac{CL^3}{EWH^3} \qquad \text{(3.3-1式)}$$

取對數：

3.3-1 因子效應的理論解 (Analytical Factor Effects)

$$\eta = \eta_c + 3\log L - \log E - \log W - 3\log H \qquad (3.3\text{-}2式)$$

表3.3-1 懸臂樑設計因子

Factor	Description	Level 1	Level 2	Level 3
L	Beam length (mm)	16	20	24
E	Elastic modulus (GPa)	170	190	210
W	Beam width (mm)	3	4	5
H	Beam height (mm)	0.8	1.0	1.2

表3.3-2 因子效應的理論值

	L	E	W	H
$E^{1\to2}$	0.291	-0.048	-0.125	-0.291
$E^{2\to3}$	0.238	-0.043	-0.097	-0.238

因子效應計算

$$\eta = \eta_c + 3\log L - \log E - \log W - 3\log H \qquad （3.3\text{-}2式）$$

$E_L^{1\to 2} =$

$E_L^{2\to 3} =$

$E_E^{1\to 2} =$

$E_E^{2\to 3} =$

$E_W^{1\to 2} =$

$E_W^{2\to 3} =$

$E_H^{1\to 2} =$

$E_H^{2\to 3} =$

3.3-2 實驗與實驗模式的建立 (Building Empirical Model)

表3.3-3 $L_9(3^4)$直交表

Exp.	*L*	*E*	*W*	*H*
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

表3.3-4 實驗數據

Exp.	*L*	*E*	*W*	*H*	*y*	η
1	16	170	3	0.8	0.0627	-1.202
2	16	190	4	1.0	0.0216	-1.666
3	16	210	5	1.2	0.0090	-2.044
4	20	170	4	1.2	0.0272	-1.565
5	20	190	5	0.8	0.0658	-1.182
6	20	210	3	1.0	0.0508	-1.294
7	24	170	5	1.0	0.0651	-1.187
8	24	190	3	1.2	0.0561	-1.251
9	24	210	4	0.8	0.1286	-0.891
				Ave =	0.0541	-1.365

因子反應表及因子反應圖

表3.3-5 因子反應表 (η)

	L	E	W	H
Level 1	-1.638	-1.318	-1.249	-1.092
Level 2	-1.347	-1.366	-1.374	-1.382
Level 3	-1.109	-1.410	-1.471	-1.620
$E^{1\to 2}$	0.291	-0.048	-0.125	-0.291
$E^{2\to 3}$	0.238	-0.043	-0.097	-0.238

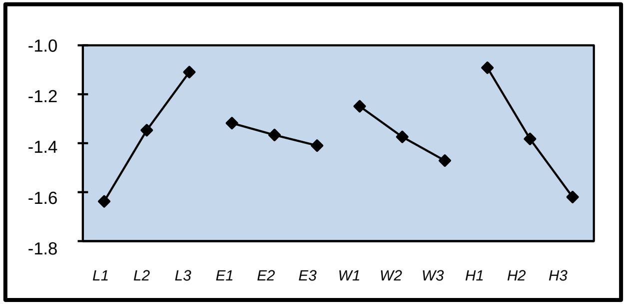


表3.3-5的因子反應表與表3.3-2的理論值是完全一致的！

實驗模式

實驗模式：

$$\eta(Li,Ej,Wk,Hm)=\overline{\eta}+\left(\overline{\eta}_{Li}-\overline{\eta}\right)+\left(\overline{\eta}_{Ej}-\overline{\eta}\right)+\left(\overline{\eta}_{Wk}-\overline{\eta}\right)+\left(\overline{\eta}_{Hm}-\overline{\eta}\right)$$
$$=\overline{\eta}_{Li}+\overline{\eta}_{Ej}+\overline{\eta}_{Wk}+\overline{\eta}_{Hm}-3\overline{\eta} \qquad \text{（3.3-3式）}$$

其中i=1, 2 , 3；j=1, 2 , 3；k=1, 2 , 3；m=1, 2 , 3。

譬如在（L3 E3 W3 H3）下，

變位量 y則必須轉換回來：

自由度的討論

- 因子反應表（表3.3-5）中的12個反應值及總平均值（$\overline{\eta}$）相當於實驗模式（3.3-3式）的參數。
- 亦即，3.3-3式及這13個參數構成完整的實驗模式。 這13個參數並非完全獨立的，它們有下列關係：
- 所以這13個參數共有？個自由度。
- 這13個參數的計算過程中，原始的資料來源就是表3.3-4中的？個變位量（y 值），所以這13個參數最多只能有？個獨立的資訊（亦即？個自由度）。

3.3-3 實驗模式與理論公式的比較

表3.3-6 實驗模式（3.3-3式）與懸臂樑公式（3.3-1式）的比較

Exp.	*L*	*E*	*W*	*H*	*L*	*E*	*W*	*H*	η	*y*	3.3-1式
1	1	1	1	1	16	170	3	0.8	-1.202	0.0627	0.0627
2	1	2	2	2	16	190	4	1.0	-1.666	0.0216	0.0216
3	1	3	3	3	16	210	5	1.2	-2.044	0.0090	0.0090
4	2	1	2	3	20	170	4	1.2	-1.565	0.0272	0.0272
5	2	2	3	1	20	190	5	0.8	-1.182	0.0658	0.0658
6	2	3	1	2	20	210	3	1.0	-1.294	0.0508	0.0508
7	3	1	3	2	24	170	5	1.0	-1.187	0.0651	0.0651
8	3	2	1	3	24	190	3	1.2	-1.251	0.0561	0.0561
9	3	3	2	1	24	210	4	0.8	-0.891	0.1286	0.1286
a	1	2	3	1	16	190	5	0.8	-1.473	0.0337	0.0337
b	2	2	2	2	20	190	4	1.0	-1.376	0.0421	0.0421
c	3	3	3	3	24	210	5	1.2	-1.516	0.0305	0.0305
d	2.5	3	3	3	22	210	5	1.2	-1.635	0.0232	0.0235
e	1.5	1.5	2.5	2.5	18	180	4.5	1.1	-1.664	0.0217	0.0216

討論：實驗模式與理論公式的比較

- 第1-9組實驗是L_9直交表的因子組合；將這些計算的變位量 y 與表3.3-4的 y 做一對照，你會發現它們是完全一致的。
- 通常在所有自由度都被利用到的情況下，實驗模式必會完全滿足這些實驗值。
  - 此時有 n 個數據來決定實驗模式中的 n 個參數，所以實驗模式必會「通過」（interpolate）這些實驗數據點。
- 當自由度沒有被完全利用到的情況下（亦即不飽和直交表實驗，譬如$L_9(3^4)$直交表只利用到3行，剩下一行並沒有配置控制因子），實驗模式並非「通過」，而是「最佳吻合」（best fit）於這些實驗數據點。
  - 此時有 n 個數據（自由度）來決定實驗模式中少於 n 個的參數。

討論：以實驗模式預測反應值

- 第a, b, c組實驗是不在L_9直交表內的任意因子組合，表3.3-6顯示實驗模式（3.3-3式）所預測的值與懸臂樑公式（3.3-1式）所計算的理論值也是完全一致的。這樣的結果在其它的應用上並不常見。
  - 在本例中，因為理論公式經對數轉換後（3.2-11式）完全符合加法模式的形式（3.2-12式），所以實驗模式與理論公式可以完全一致。
- 一般而言，縱使經過對數轉換，實驗模式與理論值大多不能完全一致，但只要誤差在可接受的範圍內，則該實驗模式便足夠精確。
- 確認實驗的目的就是以不在直交表內的因子組合實驗數據來驗証實驗模式的精確性。

討論：以實驗模式預測反應值

- 第d, e組實驗是不屬於任何因子組合的情況。
  - 譬如第d組採用了樑長22 mm的設計，我們以L2.5來表示，因為它是介於L2與L3中間的值，其理論值依3.3-1式計算的結果是0.0235 mm，而實驗模式的預測值是0.0232，此數值開始有一些偏離理論值。
- 一般而言，加法模式只能用來預測因子水準組合下的反應值，對於如第d或e組實驗，非因子水準組合下的情況，加法模式通常無法用來預測系統的行為。

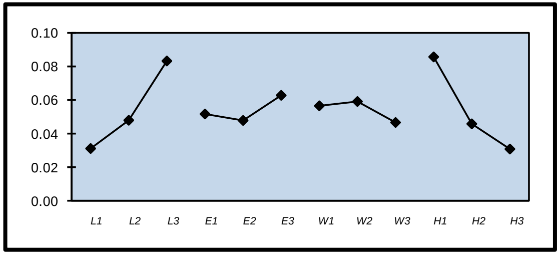
3.3-4 討論：沒有經過對數轉換的情形

表3.3-4 實驗數據

Exp.	L	E	W	H	y	η
1	16	170	3	0.8	0.0627	-1.202
2	16	190	4	1.0	0.0216	-1.666
3	16	210	5	1.2	0.0090	-2.044
4	20	170	4	1.2	0.0272	-1.565
5	20	190	5	0.8	0.0658	-1.182
6	20	210	3	1.0	0.0508	-1.294
7	24	170	5	1.0	0.0651	-1.187
8	24	190	3	1.2	0.0561	-1.251
9	24	210	4	0.8	0.1286	-0.891
				Ave =	0.0541	-1.365

表3.3-7 因子反應表 (y)

	L	E	W	H
Level 1	0.0311	0.0517	0.0566	0.0857
Level 2	0.0479	0.0478	0.0591	0.0458
Level 3	0.0833	0.0628	0.0466	0.0308
$E^{1\to 2}$	0.0168	-0.0038	0.0026	-0.0399
$E^{2\to 3}$	0.0353	0.0150	-0.0125	-0.0150



討論：實驗模式與理論公式的比較

表3.3-8 實驗模式（無對數轉換）與理論值的比較

Exp.	*L*	*E*	*W*	*H*	*L*	*E*	*W*	*H*	*y*	3.3-1式
1	1	1	1	1	16	170	3	0.8	0.0627	0.0627
2	1	2	2	2	16	190	4	1.0	0.0216	0.0216
3	1	3	3	3	16	210	5	1.2	0.0090	0.0090
4	2	1	2	3	20	170	4	1.2	0.0272	0.0272
5	2	2	3	1	20	190	5	0.8	0.0658	0.0658
6	2	3	1	2	20	210	3	1.0	0.0508	0.0508
7	3	1	3	2	24	170	5	1.0	0.0651	0.0651
8	3	2	1	3	24	190	3	1.2	0.0561	0.0561
9	3	3	2	1	24	210	4	0.8	0.1286	0.1286
a	1	2	3	1	16	190	5	0.8	0.0490	0.0337
b	2	2	2	2	20	190	4	1.0	0.0384	0.0421
c	3	3	3	3	24	210	5	1.2	0.0612	0.0305

結論：未經對數轉換所建立的實驗模式通常不夠精確。

3.3-5 討論：二水準實驗（2-Level Experiments）

圖3.3-1的因子反應圖顯示η與因子間幾乎呈線性關係，這表示3水準的實驗是沒有必要的（2水準實驗就夠了）。

表3.3-9 設計因子（2水準實驗）

Factor	Description	Level 1	Level 2
L	Beam length (mm)	16	24
E	Elastic modulus (GPa)	170	210
W	Beam width (mm)	3	5
H	Beam height (mm)	0.8	1.2

表3.3-10 $L_8(2^7)$直交表及因子配置

Exp.	*L*	*E*		*W*			*H*
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

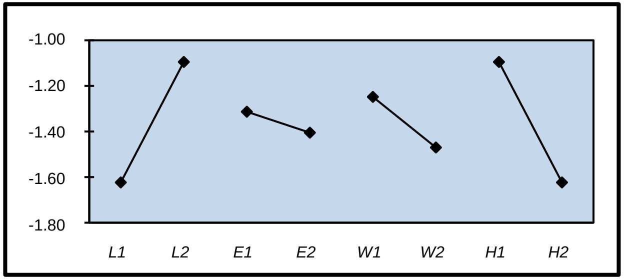
實驗數據與因子反應

表3.3-11 實驗數據（2水準實驗）

Exp.	*L*	*E*	*W*	*H*	*y*	η
1	16	170	3	0.8	0.0627	-1.202
2	16	170	5	1.2	0.0112	-1.953
3	16	210	3	1.2	0.0150	-1.822
4	16	210	5	0.8	0.0305	-1.516
5	24	170	3	1.2	0.0627	-1.202
6	24	170	5	0.8	0.1271	-0.896
7	24	210	3	0.8	0.1714	-0.766
8	24	210	5	1.2	0.0305	-1.516
					Ave =	-1.359

表3.3-12 因子反應表（2水準實驗）

	L	*E*	*W*	*H*
Level 1	-1.6234	-1.3133	-1.2483	-1.0951
Level 2	-1.0951	-1.4051	-1.4702	-1.6234



自由度的討論

- 實驗模式中的參數現在是列於表3.3-12的8個反應值，及總平均值 $\bar{\eta}=-1.359$ 。
- 這9個參數並非獨立的，它們有下列？個關係

所以9個參數只有？個自由度。

- 表3.3-11中的8個實驗數據總共可以提供？個自由度，我們只利用了？個自由度， 因為直交表中有？個直行沒有任何因子配置，以致「浪費」了這些自由度。

討論：實驗模式與理論公式的比較

表3.3-13 實驗模式與理論值的比較（2水準實驗）

Exp.	*L*	*E*	*W*	*H*	*L*	*E*	*W*	*H*	η	*y*	3.3-1式
1	1	1	1	1	16	170	3	0.8	-1.2024	0.0627	0.0627
2	1	1	2	2	16	170	5	1.2	-1.9525	0.0112	0.0112
3	1	2	1	2	16	210	3	1.2	-1.8225	0.0150	0.0150
4	1	2	2	1	16	210	5	0.8	-1.5160	0.0305	0.0305
5	2	1	1	2	24	170	3	1.2	-1.2024	0.0627	0.0627
6	2	1	2	1	24	170	5	0.8	-0.8960	0.1271	0.1271
7	2	2	1	1	24	210	3	0.8	-0.7659	0.1714	0.1714
8	2	2	2	2	24	210	5	1.2	-1.5160	0.0305	0.0305
a	1	2	1	1	16	210	3	0.8	-1.2942	0.0508	0.0508
b	2	1	2	2	24	170	5	1.2	-1.4243	0.0376	0.0376

結論：此例中，2水準實驗就足夠了。

3.3-6 對數轉換的負面效果

- 對數轉換常常可以將變數分離，使得「加法模式」能夠準確地描述一個工程系統。
- 如果真實世界中，因子與反應值之間的關係已經是「變數分離」的關係，那麼，取對數轉換後反而產生反效果，亦即「加法模式」反而失真。
- 實務上，我們通常無法事先知道工程系統的本質，而一律取對數轉換。
- 如果發現對數轉換後，加法模式無法精確地描述工程系統的行為，可以取消對數轉換再重新進行資料分析，畢竟這是簡單的計算工作，並不增加實驗成本。

數值實例

表3.3-14 實驗數據及反應值

Exp.	A	B	$y = A+B$	$\eta = \log(y)$
1	1	1	2	0.301
2	1	1	2	0.301
3	1	2	3	0.477
4	1	2	3	0.477
5	2	1	3	0.477
6	2	1	3	0.477
7	2	2	4	0.602
8	2	2	4	0.602
Level 1	0.389	0.389		Ave
Level 2	0.540	0.540		0.464

$$y(A,B) = A + B$$

表3.3-15 預測值及誤差

Exp.	A	B	Pred. η	$y = 10^{\eta}$	$A+B$	Error
1	1	1	0.314	2.0598	2	3.0%
2	1	1	0.314	2.0598	2	3.0%
3	1	2	0.464	2.9130	3	-2.9%
4	1	2	0.464	2.9130	3	-2.9%
5	2	1	0.464	2.9130	3	-2.9%
6	2	1	0.464	2.9130	3	-2.9%
7	2	2	0.615	4.1195	4	3.0%
8	2	2	0.615	4.1195	4	3.0%