第7章 直交表深入探討

Exploring Orthogonal Arrays

1. 直交表的建構（Construction of Orthogonal Arrays）
2. 交互作用表的建構（Construction of Interaction Tables）
3. 近直交表實驗（Nearly Orthogonal Arrays）

第7.1節 直交表的建構
Construction of Orthogonal Arrays

7.1-1 直交表的等效關係（Equivalence of Orthogonal Arrays）

7.1-2 純二水準直交表的建構：$L_4(2^3)$（Construction of a 2-Level OA: $L_4(2^3)$）

7.1-3 其它純二水準直交表的建構（Construction of Other 2-Level OA's）

7.1-4 純三水準直交表的建構（Construction of 3-Level OA's）

7.1-5 混合水準直交表的建構（Construction of Mix-Level OA's）

7.1-1 直交表的等效關係

表3.2-3

Exp.	*A*	*B*	*A*×*B*
1	-1	-1	+1
2	-1	+1	-1
3	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1

表A.1-1

Exp.	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

- 兩個外觀不同的直交表，有時候卻是等效的（equivalent）。
- 所謂等效是指兩個直交表實驗會計算出相同的因子效應。

水準符號的使用是任意的

- 直交表中水準符號的使用是任意的。
- 譬如2水準時可以使用(1, 2), (-1, +1), (0, 1), (a, b), 甚至以實際的設定值（譬如200℃與250℃）來表示。
- 但是一般還是以前三種表示方式較方便。

表7.1-1 $L_8(2^7)$直交表使用不同水準符號的三種表示方式

L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	1	1	1	1
3	-1	1	1	-1	-1	1	1
4	-1	1	1	1	1	-1	-1
5	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	1	-1	1	1	-1	1	-1
7	1	1	-1	-1	1	1	-1
8	1	1	-1	1	-1	-1	1

L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	1	1	0	1	0	0	1

直行內的水準符號可以任意重新排列

表7.1-2 $L_4(2^3)$直交表的兩種表示方式

L_4	*a*	*b*	*c*
1	1	1	2
2	1	2	1
3	2	1	1
4	2	2	2

L_4	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

直行可以任意重新排列

表7.1-3 $L_8(2^7)$直交表的兩種表示方式

L_8	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
1	1	1	1	2	2	2	1
2	1	1	2	2	1	1	2
3	1	2	1	1	1	2	2
4	1	2	2	1	2	1	1
5	2	1	1	1	2	1	2
6	2	1	2	1	1	2	1
7	2	2	1	2	1	1	1
8	2	2	2	2	2	2	2

L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
	a	*b*	*-d*	*c*	*-f*	*-e*	*g*

橫列可以任意重新排列

表7.1-4 $L_8(2^7)$直交表橫列的重新排列

L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

L_8	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'
1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	2	2	2	1	1
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
5	2	1	2	1	2	1	2
8	2	2	1	2	1	1	2
	2	4	6	7	5	3	1

7.1-2 純2水準直交表的建構：以$L_4(2^3)$為例

表7.1-5 $L_4(2^3)$直交表的建構程序（方法一）

	a	*b*	
1	-1	-1	
2	-1	1	
3	1	-1	
4	1	1	

L_4	*a*	*b*	*c*
1	-1	-1	-1
2	-1	1	1
3	1	-1	1
4	1	1	-1

L_4	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

$$c = -a \times b \qquad \text{（7.1-1式）}$$

- $a = -b \times c$；$b = -c \times a$。
- L_4表最多只能有3個直行；這事實上就是直交表自由度的觀念：4次的實驗最多只能評估3個因子效應或交互作用，再加上總平均共有4個獨立的統計值。
- 以上方法僅適用於2水準直交表的建構，而不能用在3水準直交表的建構。

更通用的方法

表7.1-6 $L_4(2^3)$直交表的建構程序（方法二）

	a	b	
1	0	0	
2	0	1	
3	1	0	
4	1	1	

L_4	a	b	c
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

L_4	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

$$c = \mathrm{MOD}(a + b,\ L) \qquad (7.1\text{-}2式)$$

- 你也會發現3行間有對稱關係，亦即，$a = \mathrm{MOD}(b + c, 2)$，$b = \mathrm{MOD}(c + a, 2)$。
- 你也會發現不可能導出獨立的第4個行出來。

更有系統的方法

表7.1-7 $L_4(2^3)$ 直交表的建構程序（方法三）

B	1	2	3
a	1	0	1
b	0	1	1

A	*a*	*b*
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

C	1	2	3
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

L_4	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

$$\mathbf{C} = \mathrm{MOD}(\mathrm{MMULT}(\mathbf{A},\ \mathbf{B}),\ L) \qquad (7.1\text{-}3式)$$

- A矩陣的4個列代表所有可能的水準組合，而B矩陣的3個行代表所有可能的直行組合。
- 所以A矩陣可以稱為「水準組合矩陣」（level combination matrix），而B矩陣可以稱為「直行組合矩陣」（column combination matrix）。

更有系統的方法

- 表7.1-7的程序可以直接推廣至更大的純2水準或純3水準的直交表的建構。
- 這個程序甚至可以適用於純5水準直交表的建構，但是純4水準直交表的建構程序需要做一些修改。因為4水準及5水準直交表應用不多，所以本書不予討論；若有需要，可以參考Ref. 26。
- Ref. 26: Kacker, R. N., Lagergern, E. S., and Filliben, J. J., “Taguchi’s Orthogonal Arrays are Classical Designs of Experiments”, Vol. 96, No. 5, pp. 577-591, *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 1991.

7.1-3 其它純2水準直交表的建構

$L_8(2^7)$的建構

表7.1-8 $L_8(2^7)$直交表的建構程序

B	1	2	3	4	5	6	7
a	1	0	1	0	1	0	1
b	0	1	1	0	0	1	1
c	0	0	0	1	1	1	1

A	*a*	*b*	*c*
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

C	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	1	1	0	1	0	0	1

L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

$L_{16}(2^{15})$的建構

表7.1-9 $L_{16}(2^{15})$直交表的水準組合矩陣

A	*a*	*b*	*c*	*d*
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

表7.1-10 $L_{16}(2^{15})$直交表的直行組合矩陣

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
b	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
d	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$L_{32}(2^{31})$的建構

表7.1-11 $L_{32}(2^{31})$直交表的直行組合矩陣

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
a	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
b	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
d	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

7.1-4 純3水準直交表的建構

$L_9(3^4)$ 的建構

表7.1-12 $L_9(3^4)$直交表的建構

B	1	2	3	4
a	1	0	1	2
b	0	1	1	1

A	*a*	*b*
1	0	0
2	0	1
3	0	2
4	1	0
5	1	1
6	1	2
7	2	0
8	2	1
9	2	2

C	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	2	2	2
4	1	0	1	2
5	1	1	2	0
6	1	2	0	1
7	2	0	2	1
8	2	1	0	2
9	2	2	1	0

L_9	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

$L_{27}(3^{13})$

表7.1-13 $L_{27}(3^{13})$直交表的建構

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
b	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
c	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

A	*a*	*b*	*c*
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	0	2
4	0	1	0
5	0	1	1
6	0	1	2
7	0	2	0
8	0	2	1
9	0	2	2
10	1	0	0
11	1	0	1
12	1	0	2
13	1	1	0
14	1	1	1
15	1	1	2
16	1	2	0
17	1	2	1
18	1	2	2
19	2	0	0
20	2	0	1
21	2	0	2
22	2	1	0
23	2	1	1
24	2	1	2
25	2	2	0
26	2	2	1
27	2	2	2

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
5	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	0	0	0
6	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1
7	0	2	2	2	0	0	0	2	2	2	1	1	1
8	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2
9	0	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0
10	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
11	1	0	1	2	1	2	0	1	2	0	1	2	0
12	1	0	1	2	2	0	1	2	0	1	2	0	1
13	1	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1
14	1	1	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2
15	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	1	2	0
16	1	2	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0
17	1	2	0	1	1	2	0	0	1	2	2	0	1
18	1	2	0	1	2	0	1	1	2	0	0	1	2
19	2	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
20	2	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2
21	2	0	2	1	2	1	0	2	1	0	2	1	0
22	2	1	0	2	0	2	1	1	0	2	2	1	0
23	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	0	2	1
24	2	1	0	2	2	1	0	0	2	1	1	0	2
25	2	2	1	0	0	2	1	2	1	0	1	0	2
26	2	2	1	0	1	0	2	0	2	1	2	1	0
27	2	2	1	0	2	1	0	1	0	2	0	2	1

7.1-5 混合水準直交表的建構：以$L_{18}(2^1x3^7)$為例

- 混合水準直交表的建構與前述方法有很大的差異。
- 混合水準直交表的建構大都可以經由3個程序完成：

（1）先組成一個差數矩陣（difference matrix）；

（2）將此矩陣擴展並疊加上「水準矩陣」；

（3）最後，加入一個含多個水準的直行，以補足不足的自由度，若有必要將此直行拆解成多個直行。

差數矩陣（Difference Matrix）

- 一個L水準的差數矩陣是一個正方矩陣，其任意兩直行間的差數再取L的模數後，所構成的直行中出現各水準的次數是一樣的。

表7.1-14 三水準的3x3差數矩陣（左邊）及其驗証（右邊）

	1	2	3
1	0	0	0
2	0	1	2
3	0	2	1

	2-1	3-1	3-2
1	0	0	0
2	1	2	1
3	2	1	2

表7.1-15 三水準的6x6差數矩陣（左邊）及其驗証（右邊）

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	2	2
3	0	1	0	2	1	2
4	0	2	2	1	1	0
5	0	1	2	0	2	1
6	0	2	1	2	0	1

	2-1	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	0	2	2	1	1	2	2	1	1	0
3	1	0	2	2	1	2	1	0	1	2	2	1	2	0	1
4	2	2	0	1	2	2	1	2	2	0	0	1	1	2	2
5	1	2	1	0	2	1	2	1	0	2	1	0	2	1	2
6	2	1	2	2	0	1	0	1	2	1	1	2	0	2	1

擴展差數矩陣並疊加上水準矩陣

表7.1-17 擴展差數矩陣並疊加上水準矩陣

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	2	2
5	0	0	1	1	2	2
6	0	0	1	1	2	2
7	0	1	0	2	1	2
8	0	1	0	2	1	2
9	0	1	0	2	1	2
10	0	2	2	1	1	0
11	0	2	2	1	1	0
12	0	2	2	1	1	0
13	0	1	2	0	2	1
14	0	1	2	0	2	1
15	0	1	2	0	2	1
16	0	2	1	2	0	1
17	0	2	1	2	0	1
18	0	2	1	2	0	1

+

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	2	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	1
6	2	2	2	2	2	2
7	0	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1
9	2	2	2	2	2	2
10	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1
12	2	2	2	2	2	2
13	0	0	0	0	0	0
14	1	1	1	1	1	1
15	2	2	2	2	2	2
16	0	0	0	0	0	0
17	1	1	1	1	1	1
18	2	2	2	2	2	2

=

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	2	2
4	0	0	1	1	2	2
5	1	1	2	2	0	0
6	2	2	0	0	1	1
7	0	1	0	2	1	2
8	1	2	1	0	2	0
9	2	0	2	1	0	1
10	0	2	2	1	1	0
11	1	0	0	2	2	1
12	2	1	1	0	0	2
13	0	1	2	0	2	1
14	1	2	0	1	0	2
15	2	0	1	2	1	0
16	0	2	1	2	0	1
17	1	0	2	0	1	2
18	2	1	0	1	2	0

加入直行補足自由度

表7.1-18 加入直行補足自由度並拆解

	1'	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	1
3	0	2	2	2	2	2	2
4	1	0	0	1	1	2	2
5	1	1	1	2	2	0	0
6	1	2	2	0	0	1	1
7	2	0	1	0	2	1	2
8	2	1	2	1	0	2	0
9	2	2	0	2	1	0	1
10	3	0	2	2	1	1	0
11	3	1	0	0	2	2	1
12	3	2	1	1	0	0	2
13	4	0	1	2	0	2	1
14	4	1	2	0	1	0	2
15	4	2	0	1	2	1	0
16	5	0	2	1	2	0	1
17	5	1	0	2	0	1	2
18	5	2	1	0	1	2	0

→

	2'	3'	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	1	1
3	0	0	2	2	2	2	2	2
4	0	1	0	0	1	1	2	2
5	0	1	1	1	2	2	0	0
6	0	1	2	2	0	0	1	1
7	0	2	0	1	0	2	1	2
8	0	2	1	2	1	0	2	0
9	0	2	2	0	2	1	0	1
10	1	0	0	2	2	1	1	0
11	1	0	1	0	0	2	2	1
12	1	0	2	1	1	0	0	2
13	1	1	0	1	2	0	2	1
14	1	1	1	2	0	1	0	2
15	1	1	2	0	1	2	1	0
16	1	2	0	2	1	2	0	1
17	1	2	1	0	2	0	1	2
18	1	2	2	1	0	1	2	0

→

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

原來 第1'行	拆解成	
	第2'行	第3'行
0	0	0
1	0	1
2	0	2
3	1	0
4	1	1
5	1	2

$L_{36}(2^3 x 3^{13})$的建構

- $L_{36}(2^3 x 3^{13})$直交表的建構和$L_{18}(2^1 x 3^7)$非常類似。
- 但是$L_{36}(2^3 x 3_{13})$是以3水準的12× 12 差數矩陣為基礎建構而成的。
- 詳細的建構程序請參考課本練習題7.1-3。