

---

## 3. 古典機率論

# Classical Probability Theory

---

- ◆ 學習機率的概念與定義。
- ◆ 熟悉Kolmogorov三大機率公設與重要的機率定理。
- ◆ 了解條件機率的概念。
- ◆ 了解互斥與獨立事件。
- ◆ 學習全機率定理與貝氏定理。

# 3.1 樣本空間

## 定義3.1

統計實驗(隨機實驗)中所有可能之結果的集合稱為**樣本空間(sample space)**，通常以符號 $S$ 或 $\Omega$ 來表示。

- 確定現象模型(deterministic models)、隨機現象模型(stochastic models or probabilistic models)。
- 隨機實驗：(1)實驗前能描述所有結果；(2)會發生何種結果不能事先預測；(3)能在相同條件下重複執行；(4)大量重複執行後，各種結果的出現會依循某些隨機規律。
- 在樣本空間裡的單元，我們稱為樣本空間的**元素(element)**或**成員(member)**，也可簡單的稱之為**樣本點(sample point)**。如果樣本空間擁有有限個數的元素，一般可用一個大括弧{ }，將其可能的結果表現出來，而括弧內元素間可以用逗點將其分開。以投擲硬幣為例，其樣本空間為

## 範例3.1

---

- 考慮投擲一個骰子的實驗，如果我們在意的是投擲骰子其表面所顯示的數字，則其樣本空間為

如果我們對該數字是偶數或奇數感興趣，則其樣本空間為

## 範例3.2

---

- 假設從生產製造程序中隨機選出三個產品，每個產品都受到檢驗且分類為有瑕疵的，記錄為D；無瑕疵的，記錄為N。利用樹狀圖求出樣本空間。

## 3.1 樣本空間(contd.)

---

- 如果我們考慮全世界人口數超過一百萬的城市的集合，則其樣本空間可以表示為
- 如果  $S$  是圓心在原點且半徑為 2 之圓的邊界上或其圓內的所有點的集合  $(x, y)$ ，我們會將樣本空間  $S$  以數學規則來表示：
- 某實驗要隨機抽樣到一件有瑕疵的產品、亦即第一次抽樣到有瑕疵的產品，則該抽樣即停止，其實驗的樣本空間：

## 3.2 事件

### 定義3.2

**事件(event)**是樣本空間 $S$ 的一個子集合(subset)。設有一事件 $A$ ， $A \subset S$ ，若某一次隨機實驗的結果(outcome)為 $\omega$ ，且 $\omega \in A$ ，我們稱事件 $A$ 發生。

- 對於任何已知的實驗，我們感興趣的可能會是某個**事件(event)**的發生，而不是樣本空間裡特定元素的出現。比方，在範例3.2中，我們感興趣的是「三個檢測的產品中剛好有兩個是瑕疵品」的事件，記為 $B$ ，則 $B$ 為

### 範例3.3

- 考慮樣本空間 $S = \{t \mid t \geq 0\}$ ，其中 $t$ 代表某電子零件的壽命（以年為單位）。若 $A$ 為在第5年的年底之前此零件會損壞的事件，則 $A$ 為
- 事件可能是包括整個樣本空間 $S$ 的集合，也有可能是一個**空集合(null set)**。空集合中沒有任何元素，我們以符號「 $\phi$ 」代表空集合。比方， $A$ 是生物實驗裡以肉眼看出顯微生物的事件。Any other examples?

## 3.2 事件(contd.)

### 定義3.3

在一個樣本空間 $S$ 中的一個事件 $A$ ，則所有不在事件 $A$ 的元素所形成的集合，稱為事件 $A$ 關於 $S$ 的互補集合(complement)。事件 $A$ 的互補集合我們用符號 $A'$ 來表示。事件 $A$ 與事件 $A'$ 都是樣本空間的子集合。

### 範例3.4

- 考慮樣本空間 $S = \{ \text{書, 手機, mp3, 紙張, 信紙, 桌上型電腦} \}$   
令 $A = \{ \text{書, 信紙, 桌上型電腦} \}$ ，則關於 $S$ ，事件 $A$ 的互補集合為

## 3.2 事件(contd.)

### 定義3.4

A 和 B 兩個事件的交集我們記為  $A \cap B$ 。  $A \cap B$  是一個事件，定義為包含 A 與 B 所有共同元素的事件。

### 範例3.5

- 令 E 代表在一個碩士班中隨機選取一位學生其主修為工程學的事件，而 F 代表所選取學生是女生的事件。  $E \cap F =$
- 假設  $V = \{a, e, i, o, u\}$  且  $C = \{l, r, s, t\}$ ，則  $V \cap C =$

## 3.2 事件(contd.)

### 定義3.5

如果兩事件  $A$  與  $B$  滿足  $A \cap B = \phi$ ，也就是說，事件  $A$  與  $B$  沒有相同的元素，則事件  $A$  與  $B$  是互斥的，或是互不相關的 (disjoint)。(A 與 B 會同時發生嗎?)

### 定義3.6

事件  $A$  和事件  $B$  的聯集，我們記為  $A \cup B$ 。 $A \cup B$  是一個事件，是代表包含所有屬於事件  $A$  或事件  $B$  或者同時屬於事件  $A$  和  $B$  的集合。同樣的， $A \cup B$  事件是樣本空間  $S$  的子集合。

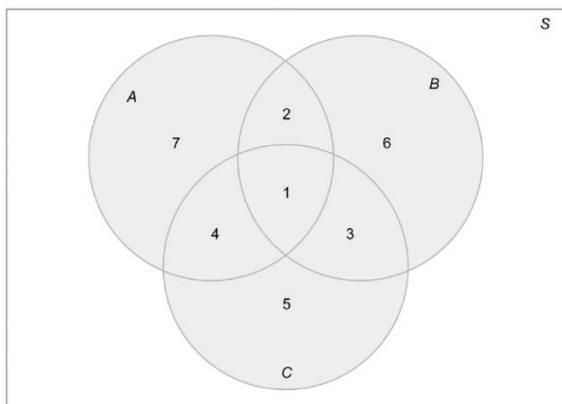
## 範例3.6

- 令  $A = \{a, b, c\}$  且  $B = \{b, c, d, e\}$ ，則  $A \cup B =$
- 令  $M = \{x | 3 < x < 9\}$  且  $N = \{y | 5 < y < 12\}$ ，則  $M \cup N =$



## 3.2 事件(contd.)

- 通常描述幾個事件與其對應的樣本空間之間的關係，可以利用文氏圖(Venn diagram)來表示。在文氏圖中，樣本空間通常以一個長方形來呈現，而事件則以畫在長方形裡面的圓形來表示，如下圖所示。



$$\begin{aligned}
 A \cap B &= \\
 B \cap C &= \\
 A \cup C &= \\
 B' \cap A &= \\
 A \cap B \cap C &= \\
 (A \cup B) \cap C' &=
 \end{aligned}$$

- 下列結果可利用文氏圖很輕易地證明：

$$\begin{array}{lll}
 A \cap \phi = \phi & A \cup \phi = A & (A')' = A \\
 A \cap A' = \phi & A \cup A' = S & (A \cup B)' = A' \cap B' \\
 S' = \phi & \phi' = S & (A \cap B)' = A' \cup B'
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{lll}} \right\}$$

## 3.3 樣本點的計算

定義 古典機率(classical probability)

設樣本空間 $S$ 為有限，定義事件 $A$ 的機率 $P(A)$ 為 $P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$ ，其中 $N(\cdot)$ 表計算集合中樣本點之個數(size of set function)，也稱為先天(或先驗)機率(a priori probability)。

規律2.1 如果一項運算能以 $n_1$ 種方法來執行，而且其中每一個運算法都能再以 $n_2$ 種方法來執行，那麼這2個運算共有 $n_1 \times n_2$ 種運算法來執行。

### 範例3.7

- 在一個22個會員的俱樂部中，欲推選一位主席以及一位財務長，請問有多少種可能的選舉結果？

## 3.3 樣本點的計算(contd.)

規律2.2 在 $k$ 次計數運算中，如果第1次運算能以  $n_1$  種方法來執行，第2次運算能以  $n_2$  種方法來執行，第3次運算能以  $n_3$  種方法來執行，以此類推，第 $k$ 次運算能以  $n_k$  種方法來執行，則此 $k$ 次計數運算共有  $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$  種不同的運算。

### 範例3.8

- 考慮一組由數字 0, 1, 2, 5, 6 和 9 組成的四位數，假設這組數字不能被重複選取。請問有多少偶數的四位數？

## 3.3 樣本點的計算(contd.)

### 定義3.7

排列是一個物件的集合中，部分物件或全部物件之安排順序的方式。

### 定義3.8

對任意一個正數  $n$ ，我們定義  $n!$ ，讀做「 $n$  階層」，為  $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$  其中  $0!$  為一特殊情況，且  $0! = 1$ 。

### 定理 3.1

$n$  個不同物件的排列數是  $n!$ 。

### 定理 3.2

在  $n$  個不同的物件中，隨意挑選  $r$  個物件，其總排列數為  ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$  (Why?)

## 範例3.9

---

- 假設一個班級有50位學生，在這個班級裡要推選一位班長及一位總務，請問在下述的條件下，有多少種可能的組合？
  - (a)選舉時沒有任何的限制。
  - (b)學生A只願意擔任班長。
  - (c)學生B與C只願意同時擔任班長或總務，或是兩個人都不擔任任何職務。
  - (d)學生D與E不願意一起擔任班長或是總務。

## 3.3 樣本點的計算(contd.)

### 定理 3.3

對任意  $n$  個不同的物件，其環狀排列共有  $(n-1)!$  種 (Why?)

### 定理 3.4

對任意  $n$  個物件中，若有  $n_1$  個物件相同，屬於第一類；有  $n_2$  個物件相同，屬於第二類；依此類推，有  $n_k$  個物件相同，屬於第  $k$  類，則共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

種不同的排列。

## 範例3.10

- 美式足球的訓練課裡，防衛協調員需要讓5位球員站成一排。這5位球員中有2個大二、3個大三學生。如果以年級區分球員，請問有多少種方式可以安排這些球員？

## 3.3 樣本點的計算(contd.)

### 定理 3.5

將一個  $n$  個物件的集合分割成  $r$  個分割格，其中第 1 個分割格有  $n_1$  個物件，第 2 個分割格有  $n_2$  個物件，以此類推，第  $r$  個分割格有  $n_r$  個物件，則其分割的方法共有

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

其中  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

### 範例3.11

- 在一個研討會的飯店中，請問有幾種方式可以將7個畢業生的住宿分為1間三人房和2間雙人房？

## 3.3 樣本點的計算(contd.)

---

定理 3.6

從  $n$  個不同物件中一次取出  $r$  個的組合數為  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  (與定理3.5的關聯性為何?)

### 範例3.12

---

- 小明請母親幫忙從他的10個遊戲卡匣和5個運動遊戲中挑選5個，請問他的母親會拿到3個遊戲卡匣和2個運動遊戲的組合有幾種？

### 範例3.13

---

- 請問從 *STATISTICS* 這個字的字母中，可以做出幾種不同的字母排列？



## 3.4 事件的機率

- 古典機率定義：設樣本空間  $S$  為有限，定義事件  $A$  的機率  $P(A)$  為

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}, \text{ 其中 } N(\cdot) \text{ 表計算集合中樣本點的個數。}$$

限制：(1) 假設樣本空間中每一個樣本點發生的可能性皆相同(equally likely)。  
(2) 有限樣本空間。

- 在樣本空間中，每個樣本點的出現機率之總和為？

### 定義 3.9

事件  $A$  的機率值就是在事件  $A$  中所有樣本點的機率值的總和，因此

$$0 \leq P(A) \leq 1, P(\phi) = 0 \text{ 以及 } P(S) = 1$$

除此之外，如果  $A_1, A_2, A_3, \dots$  代表兩兩彼此互斥的事件，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

## 範例3.14

---

- 一個灌鉛的骰子(即不公平的骰子)，其出現偶數的機率是出現奇數的兩倍。若事件  $E$  代表投擲骰子一次而出現的數字小於4的事件，請問  $P(E) = ?$

## 範例3.15

---

- 在範例3.14中，假設  $A$  是出現偶數的事件， $B$  是出現數字可被3整除的事件，請問  $P(A \cup B) = ?$  以及  $P(A \cap B) = ?$

## 範例3.16

---

- 在 5 張隨機挑選的撲克牌中，請問拿到 2 張 A 與 3 張 J 的機率是多少？

## 3.5 加法律 (Additive Rules)

### 定理 3.7

如果 A 和 B 是兩個任意的事件，其機率分別為  $P(A)$  以及  $P(B)$ ，則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{How to prove it?})$$

推論 3.1 如果 A 和 B 互斥，則  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

推論 3.2 如果事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  彼此互斥，則  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

推論 3.3 如果事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是樣本空間 S 的一個分割，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

### 定理 3.8

如果 A、B 和 C 是 3 個任意的事件，其機率分別為  $P(A)$ 、 $P(B)$  以及  $P(C)$ ，則

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

### 定理 3.9

如果事件 A 和  $A'$  為互補，則  $P(A) + P(A') = 1$

(How to prove it?)

## 範例3.17

---

- What is the probability of getting a total of 7 or 11 when a pair of fair dice is tossed?

## 範例3.18

---

- Suppose the manufacturer's specifications for the length of a certain type of computer cable are  $2000 \pm 10$  mm. In this industry, it is known that a small cable is just as likely to be defective (not meeting specifications) as a large cable. The probability that the production procedure meets specifications is known to be 0.99.
  - (a) What is the probability that a cable selected randomly is too large?
  - (b) What is the probability that a randomly selected cable is larger than 1990 mm?

## 3.6 條件機率、獨立、乘法律

定義 3.10 條件機率(conditional probability)

已知 A，事件 B 的機率，記為  $P(B|A)$ ，定義為 
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

假設  $P(A) \neq 0$ ，亦即  $P(A) > 0$ 。

### 範例 3.19

- The probability that a regularly scheduled flight departs on time is  $P(D) = 0.83$ ; the probability that it arrives on time is  $P(A) = 0.82$ ; the probability that it departs and arrives on time is  $P(D \cap A) = 0.78$ . Find the probability that a plane
  - (a) arrives on time, given that it departed on time;
  - (b) departed on time, given that it has arrived on time;
  - (c) arrives on time, given that its departure was delayed.

## 3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

定義 3.11 獨立事件(independent events)

兩事件 A 和 B 是獨立事件，若且唯若  $P(B|A) = P(B)$  或  $P(A|B) = P(A)$ ，否則，事件 A 和 B 是相關的(dependent)。

定理 3.10 乘法律(multiplication rule)

如果在一個實驗中，兩事件 A 和 B 都可能發生，且  $P(A) \neq 0$ ，亦即  $P(A) > 0$ ，則  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

### 範例3.20

- One bag contains 4 white balls and 3 black balls, and a second bag contains 3 white balls and 5 black balls. One ball is drawn from the first bag and placed unseen in the second bag. What is the probability that a ball now drawn from the second bag is black?

## 3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

---

定理 3.11

事件 A 和事件 B 為獨立事件，若且唯若  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

### 範例 3.21

---

- An electrical system consists of four components as shown in the figure. The system works if components A and B work and either of the components C or D works. The reliability (probability of working) of each component is also shown in the figure. Find the probability that (a) the entire system works and (b) the component C does not work, given that the entire system works. Assume that the four components work independently.

## 3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

---

### 定理 3.12

在一個實驗中，假設事件  $A_1, A_2, \dots, A_k$  都可能發生，即  $P(A_i) \neq 0, 1 \leq i \leq k$ ，則

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

如果事件  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是獨立事件，則  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_k)$

### 範例3.22

---

- Three cards are drawn in succession, without replacement, from an ordinary deck of playing cards. Find the probability that the event  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  occurs, where  $A_1$  is the event that the first card is a red ace,  $A_2$  is the event that the second card is a 10 or a jack, and  $A_3$  is the event that the third card is greater than 3 but less than 7.



## 3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

### 定義 3.12

假設  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  為一組事件的集合。如果  $\mathcal{A}$  的任意一個子集合  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ ，其中  $i_k \leq n$ ，使得  $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$ ，則  $\mathcal{A}$  為彼此獨立。

- Why not just use  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n)$  as the sufficient condition?

## 3.7 貝式定理(Bayes' Rule)

定理 3.13 全機率定理(theorem of total probability)

(切麵包定理)

假設事件  $B_1, B_2, \dots, B_k$  為樣本空間  $S$  的一個分割，而且對任何一個事件  $B_i$ ， $P(B_i) \neq 0$ ， $1 \leq i \leq k$ 。則對樣本空間  $S$  內的任意子集合  $A$ ，滿足

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)$$

(How to prove it?)

## 範例3.23

- In a certain assembly plant, three machines, B1, B2, and B3, make 30%, 45%, and 25%, respectively, of the products. It is known from past experience that 2%, 3%, and 2% of the products made by each machine, respectively, are defective. Now, suppose that a finished product is randomly selected. What is the probability that it is defective?

### 定理 3.14 貝式定理 (Bayes' Rule)

假設事件  $B_1, B_2, \dots, B_k$  為樣本空間  $S$  的一個分割，而且對任何一個  $B_i$ ， $P(B_i) \neq 0$ ， $1 \leq i \leq k$ 。則對於任何在樣本空間裡的一個子集合  $A$ ，其中  $P(A) \neq 0$ ，

滿足 
$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A | B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)}$$
，對所有的  $r = 1, 2, \dots, k$

(How to prove it?)

## 範例3.24

---

- A manufacturing firm employs three analytical plans for the design and development of a particular product. For cost reasons, all three are used at varying times. In fact, plans 1, 2, and 3 are used for 30%, 20%, and 50% of the products, respectively. The defect rate is different for the three procedures as follows:

$P(D|P_1) = 0.01$ ,  $P(D|P_2) = 0.03$ ,  $P(D|P_3) = 0.02$ , where  $P(D|P_j)$  is the probability of a defective product, given plan  $j$ .

If a random product was observed and found to be defective, which plan was most likely used and thus responsible?