3. 古典機率論
Classical Probability Theory

- 學習機率的概念與定義。
- 熟悉Kolmogorov三大機率公設與重要的機率定理。
- 了解條件機率的概念。
- 了解互斥與獨立事件。
- 學習全機率定理與貝氏定理。

3.1 樣本空間

定義3.1
統計實驗(隨機實驗)中所有可能之結果的集合稱為樣本空間(sample space)，通常以符號S或Ω來表示。

- 確定現象模型(deterministic models)、隨機現象模型(stochastic models or probabilistic models)。

- 隨機實驗：(1)實驗前能描述所有結果；(2)會發生何種結果不能事先預測；(3)能在相同條件下重複執行；(4)大量重複執行後，各種結果的出現會依循某些隨機規律。

- 在樣本空間裡的單元，我們稱為樣本空間的元素(element)或成員(member)，也可簡單的稱之為樣本點(sample point)。如果樣本空間擁有有限個數的元素，一般可用一個大括弧{ }，將其可能的結果表現出來，而括弧內元素間可以用逗點將其分開。以投擲硬幣為例，其樣本空間為

範例3.1

- 考慮投擲一個骰子的實驗，如果我們在意的是投擲骰子其表面所顯示的數字，則其樣本空間為

  如果我們對該數字是偶數或奇數感興趣，則其樣本空間為

範例3.2

- 假設從生產製造程序中隨機選出三個產品，每個產品都受到檢驗且分類為有瑕疵的，記錄為D；無瑕疵的，記錄為N。利用樹狀圖求出樣本空間。

3.1 樣本空間(contd.)

- 如果我們考慮全世界人口數超過一百萬的城市的集合，則其樣本空間可以表示為

- 如果 S 是圓心在原點且半徑為 2 之圓的邊界上或其圓內的所有點的集合(x, y)，我們會將樣本空間 S 以數學規則來表示：

- 某實驗要隨機抽樣到一件有瑕疵的產品、亦即第一次抽樣到有瑕疵的產品，則該抽樣即停止，其實驗的樣本空間：

3.2 事件

定義3.2

事件(event)是樣本空間S的一個子集合(subset)。設有一事件A，$A \subset S$，若某一次隨機實驗的結果(outcome)為ω，且$\omega \in A$，我們稱事件A發生。

- 對於任何已知的實驗，我們感興趣的可能會是某個事件(event)的發生，而不是樣本空間裡特定元素的出現。比方，在範例3.2中，我們感興趣的是「三個檢測的產品中剛好有兩個是瑕疵品」的事件，記為 B，則 B 為

範例3.3

- 考慮樣本空間$S = \{t \mid t \geq 0\}$, 其中 t 代表某電子零件的壽命 (以年為單位)。若 A 為在第 5 年的年底之前此零件會損壞的事件，則 A 為

- 事件可能是包括整個樣本空間 S 的集合，也有可能是一個空集合(null set)。空集合中沒有任何元素，我們以符號「ϕ」代表空集合。比方，A 是生物實驗裡以裸眼看出顯微生物的事件。Any other examples?

3.2 事件(contd.)

定義3.3

在一個樣本空間S中的一個事件A，則所有不在事件A的元素所形成的集合，稱為事件A關於的S互補集合(complement)。事件A的互補集合我們用符號A'來表示。事件A與事件A'都是樣本空間的子集合。

範例3.4

- 考慮樣本空間 $S=\{$ 書, 手機, mp3, 紙張, 信紙, 桌上型電腦 $\}$
  令 $A=\{$ 書, 信紙, 桌上型電腦 $\}$，則關於 S，事件 A 的互補集合為

3.2 事件(contd.)

定義3.4

A 和 B 兩個事件的交集我們記為 $A \cap B$。$A \cap B$ 是一個事件，定義為包含 A 與 B 所有共同元素的事件。

範例3.5

- 令 E 代表在一個碩士班中隨機選取一位學生其主修為工程學的事件，而 F 代表所選取學生是女生的事件。$E \cap F =$
- 假設 $V = \{a, e, i, o, u\}$ 且 $C = \{l, r, s, t\}$，則 $V \cap C =$

3.2 事件(contd.)

定義3.5

如果兩事件 A 與 B 滿足 $A \cap B = \phi$，也就是說，事件 A 與 B 沒有相同的元素，則事件 A 與 B 是互斥的，或是互不相關的 **(disjoint)**。 (A 與 B 會同時發生嗎?)

定義3.6

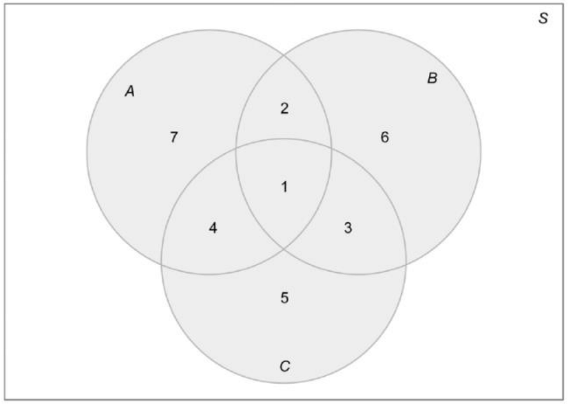
事件 A 和事件 B 的聯集，我們記為$A \cup B$ 。$A \cup B$ 是一個事件，是代表包含所有屬於事件 A 或事件 B 或者同時屬於事件 A 和 B 的集合。同樣的，$A \cup B$ 事件是樣本空間 S 的子集合。

範例3.6

- 令 $A = \{a, b, c\}$ 且 $B = \{b, c, d, e\}$，則 $A \cup B =$
- 令 $M = \{x \mid 3 < x < 9\}$ 且 $N = \{y \mid 5 < y < 12\}$，則 $M \cup N =$

3.2 事件(contd.)

- 通常描述幾個事件與其對應的樣本空間之間的關係，可以利用文氏圖(Venn diagram) 來表示。在文氏圖中，樣本空間通常以一個長方形來呈現，而事件則以畫在長方形裡面的圓形來表示，如下圖所示。



$$A \cap B =$$
$$B \cap C =$$
$$A \cup C =$$
$$B' \cap A =$$
$$A \cap B \cap C =$$
$$(A \cup B) \cap C' =$$

- 下列結果可利用文氏圖很輕易地證明：

$$A \cap \phi = \phi \qquad A \cup \phi = A \qquad (A')' = A$$
$$A \cap A' = \phi \qquad A \cup A' = S \qquad (A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$S' = \phi \qquad \phi' = S \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

3.3 樣本點的計算

定義　古典機率(classical probability)

設樣本空間S為有限，定義事件A的機率$\mathrm{P}(A)$為$\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{N}(A)}{\mathrm{N}(S)}$，其中$\mathrm{N}(\cdot)$表計算集合中樣本點之個數(size of set function) ，也稱為先天(或先驗)機率(a priori probability)。

規律2.1　如果一項運算能以 n_1 種方法來執行，而且其中每一個運算法都能再以 n_2 種方法來執行，那麼這 2 個運算共有 $n_1 \times n_2$ 種運算法來執行。

範例3.7

- 在一個 22 個會員的俱樂部中，欲推選一位主席以及一位財務長，請問有多少種可能的選舉結果？

3.3 樣本點的計算(contd.)

規律2.2 在k次計數運算中，如果第1次運算能以 n_1 種方法來執行，第2次運算能以 n_2 種方法來執行，第3次運算能以 n_3 種方法來執行，以此類推，第k次運算能以 n_k 種方法來執行，則此k次計數運算共有 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ 種不同的運算。

範例3.8

- 考慮一組由數字 0, 1, 2, 5, 6 和 9 組成的四位數，假設這組數字不能被重複選取。請問有多少偶數的四位數？

3.3 樣本點的計算(contd.)

定義3.7
排列是一個物件的集合中，部分物件或全部物件之安排順序的方式。

定義3.8
對任意一個正數 n，我們定義 $n!$，讀做「 n 階層」，為 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$
其中 $0!$ 為一特殊情況，且 $0! = 1$ 。

定理 3.1
n 個不同物件的排列數是 $n!$ 。

定理 3.2
在 n 個不同的物件中，隨意挑選 r 個物件，其總排列數為 ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (Why?)

範例3.9

- 假設一個班級有50位學生，在這個班級裡要推選一位班長及一位總務，請問在下述的條件下，有多少種可能的組合？

  (a)選舉時沒有任何的限制。

  (b)學生A只願意擔任班長。

  (c)學生B與C只願意同時擔任班長或總務，或是兩個人都不擔任任何職務。

  (d)學生D與E不願意一起擔任班長或是總務。

3.3 樣本點的計算(contd.)

定理 3.3
對任意 n 個不同的物件，其環狀排列共有 $(n-1)!$ 種　(Why?)

定理 3.4
對任意 n 個物件中，若有 n_1 個物件相同，屬於第一類；有 n_2 個物件相同，屬於第二類；依此類推，有 n_k 個物件相同，屬於第 k 類，則共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

種不同的排列。

範例3.10

- 美式足球的訓練課裡，防衛協調員需要讓5位球員站成一排。這5位球員中有2個大二、3個大三學生。如果以年級區分球員，請問有多少種方式可以安排這些球員？

3.3 樣本點的計算(contd.)

定理 3.5

將一個 n 個物件的集合分割成 r 個分割格，其中第 1 個分割格有 n_1 個物件，第 2 個分割格有 n_2 個物件，以此類推，第 r 個分割格有 n_r 個物件，則其分割的方法共有

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

其中 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$

範例3.11

- 在一個研討會的飯店中，請問有幾種方式可以將7個畢業生的住宿分為1間三人房和2間雙人房？

3.3 樣本點的計算(contd.)

定理 3.6

從 n 個不同物件中一次取出 r 個的組合數為 $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (與定理3.5的關聯性為何?)

範例3.12

- 小明請母親幫忙從他的10個遊戲卡匣和5個運動遊戲中挑選5個，請問他的母親會拿到3個遊戲卡匣和2個運動遊戲的組合有幾種？

範例3.13

- 請問從 *STATISTICS* 這個字的字母中，可以做出幾種不同的字母排列？

3.4 事件的機率

- 古典機率定義：設樣本空間 S 為有限，定義事件 A 的機率$\mathrm{P}(A)$為

  $\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{N}(A)}{\mathrm{N}(S)}$，其中$\mathrm{N}(\cdot)$表計算集合中樣本點的個數。

  限制：(1)假設樣本空間中每一個樣本點發生的可能性皆相同(equally likely)。

  (2)有限樣本空間。

- 在樣本空間中，每個樣本點的出現機率之總和為?

定義 3.9

事件 A 的機率值就是在事件 A 中所有樣本點的機率值的總和，因此

$$0 \le P(A) \le 1 \text{ ， } P(\phi) = 0 \text{ 以及 } P(S) = 1$$

除此之外，如果 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 代表兩兩彼此互斥的事件，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

範例3.14

- 一個灌鉛的骰子(即不公平的骰子)，其出現偶數的機率是出現奇數的兩倍。若事件 E 代表投擲骰子一次而出現的數字小於4的事件，請問 P(E) = ?

範例3.15

- 在範例3.14中，假設A是出現偶數的事件，B是出現數字可被3整除的事件，請問 $P(A \cup B) = ?$ 以及 $P(A \cap B) = ?$

範例3.16

- 在 5 張隨機挑選的撲克牌中，請問拿到 2 張 A 與 3 張 J 的機率是多少？

3.5 加法律 (Additive Rules)

定理 3.7
如果 A 和 B 是兩個任意的事件，其機率分別為 P(A) 以及 P(B) ，則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(How to prove it?)

推論 3.1　如果 A 和 B 互斥，則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

推論 3.2　如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 彼此互斥，則 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

推論 3.3　如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是樣本空間 S 的一個分割，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1$$

定理 3.8
如果 A、B 和 C 是 3 個任意的事件，其機率分別為 P(A)、P(B) 以及 P(C)，則

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

定理 3.9
如果事件 A 和 A' 為互補，則 $P(A) + P(A') = 1$

(How to prove it?)

範例3.17

- What is the probability of getting a total of 7 or 11 when a pair of fair dice is tossed?

範例3.18

- Suppose the manufacturer's specifications for the length of a certain type of computer cable are 2000 ± 10 mm. In this industry, it is known that a small cable is just as likely to be defective (not meeting specifications) as a large cable. The probability that the production procedure meets specifications is known to be 0.99.

  (a) What is the probability that a cable selected randomly is too large?

  (b) What is the probability that a randomly selected cable is larger than 1990 mm?

3.6 條件機率、獨立、乘法律

定義 3.10 條件機率(conditional probability)

已知 A，事件 B 的機率，記為 $P(B|A)$，定義為 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

假設 $P(A)\neq 0$，亦即 $P(A)>0$ 。

範例3.19

- The probability that a regularly scheduled flight departs on time is P(D) = 0.83; the probability that it arrives on time is P(A) = 0.82; the probability that it departs and arrives on time is P(D ∩A) = 0.78. Find the probability that a plane

  (a) arrives on time, given that it departed on time;

  (b) departed on time, given that it has arrived on time;

  (c) arrives on time, given that its departure was delayed.

3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

定義 3.11 獨立事件(independent events)

兩事件 A 和 B 是獨立事件，若且唯若 $P(B|A)=P(B)$ 或 $P(A|B)=P(A)$ ，否則，事件 A 和 B 是相關的(dependent)。

定理 3.10 乘法律(multiplication rule)

如果在一個實驗中，兩事件 A 和 B 都可能發生，且 $P(A)\neq 0$，亦即 $P(A)>0$ ，則 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

範例3.20

- One bag contains 4 white balls and 3 black balls, and a second bag contains 3 white balls and 5 black balls. One ball is drawn from the first bag and placed unseen in the second bag. What is the probability that a ball now drawn from the second bag is black?

3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

定理 3.11
事件 A 和事件 B 為獨立事件，若且唯若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

範例3.21

- An electrical system consists of four components as shown in the figure. The system works if components A and B work and either of the components C or D works. The reliability (probability of working) of each component is also shown in the figure. Find the probability that (a) the entire system works and (b) the component C does not work, given that the entire system works. Assume that the four components work independently.

3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

定理 3.12

在一個實驗中，假設事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都可能發生，即 $P(A_i) \neq 0$，$1 \leq i \leq k$，則

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\cdots P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})$

如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是獨立事件，則 $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)$

範例3.22

- Three cards are drawn in succession, without replacement, from an ordinary deck of playing cards. Find the probability that the event A1 ∩ A2 ∩ A3 occurs, where A1 is the event that the first card is a red ace, A2 is the event that the second card is a 10 or a jack, and A3 is the event that the third card is greater than 3 but less than 7.

3.6 條件機率、獨立、乘法律(contd.)

定義 3.12

假設 $\mathcal{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 為一組事件的集合。如果 A 的任意一個子集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$，其中 $i_k \le n$，使得 $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$，則 A 為彼此獨立。

- Why not just use $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n)$ as the sufficient condition ?

3.7 貝式定理(Bayes' Rule)

定理 3.13 全機率定理(theorem of total probability) (切麵包定理)

假設事件 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 為樣本空間 S 的一個分割，而且對任何一個事件 B_i，$P(B_i) \neq 0$，$1 \le i \le k$。則對樣本空間 S 內的任意子集合 A，滿足

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

(How to prove it?)

範例3.23

- In a certain assembly plant, three machines, B1, B2, and B3, make 30%, 45%, and 25%, respectively, of the products. It is known from past experience that 2%, 3%, and 2% of the products made by each machine, respectively, are defective. Now, suppose that a finished product is randomly selected. What is the probability that it is defective?

定理 3.14　貝式定理 (Bayes' Rule)

假設事件 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 為樣本空間 S 的一個分割，而且對任何一個 B_i，$P(B_i) \neq 0$，$1 \leq i \leq k$。則對於任何在樣本空間裡的一個子集合 A，其中 $P(A) \neq 0$，滿足

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

，對所有的 $r = 1, 2, \cdots, k$

(How to prove it?)

範例3.24

- A manufacturing firm employs three analytical plans for the design and development of a particular product. For cost reasons, all three are used at varying times. In fact, plans 1, 2, and 3 are used for 30%, 20%, and 50% of the products, respectively. The defect rate is different for the three procedures as follows:

  $P(D|P_1)=0.01$, $P(D|P_2)=0.03$, $P(D|P_3)=0.02$, where $P(D|P_j)$ is the probability of a defective product, given plan j.

  If a random product was observed and found to be defective, which plan was most likely used and thus responsible?